0 の 0 乗が 1 である理由

近藤健一

1　素朴な考察

0^0 の値は何であろうか。

$x > 0$ では二変数関数 x^y が定義されて連続となるので、その原点付近における様子を調べるのが自然である。$\lim_{x \to 0} x^{ax}$ は常に 1 となるが、$a > 0$ に対して

$$\lim_{x \to 0} x^{\log a / \log x} = a$$

が成り立ち、さらに $0 < a < 1$ に対して

$$\lim_{x \to +0} \left(a^{1/x^2}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \to -0} \left(a^{1/x^2}\right)^x = \infty$$

も成り立つ。つまり x^y は原点付近において「かなり」不連続であり、従って 0^0 の値を求めるには別の考察が必要となる。

2　集合論的考察

有限集合 X, Y を考えたとき、Y から X への写像は $|X|^{|Y|}$ 通り存在する。空集合から空集合への写像を表すグラフは空集合のみだから、0^0 は 1 であると考えられる。

3　美学的考察

0^0 が 1 であれば、$n = 0$ の場合にも

$$\frac{d}{dx} x^{n+1} = (n+1)x^n$$

が成り立つ。あるいは二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

が $y = 0$ や $x + y = 0$ の場合にも成り立ち、また Vandermonde 行列が $\left(x_i^j\right)$ と書ける。

4　公理論的考察

ある数を 0 個足し合わせた結果は 0 である。それは 0 が加法の単位元だからである。同様に考えると、ある数を 0 個掛け合わせた結果は乗法の単位元 1 でなければならない。つまり 0^0 は 1 であると考えられる。

5　定義についての考察

x^n はどう定義すべきであろうか。

冪に関して最も重要なのは指数法則 $x^{m+n} = x^m x^n$ である。これは加法の乗法への変換だと考えられるから、$x^0 = 1$ 及び $x^{n+1} = x \cdot x^n$ によって x^n を定義するのが自然である。

この定義を採用する限りにおいて 0^0 は 1 であり、それは今までの考察とも符合する。

2008 年 3 月 15 日
http://poset.jp/zzp/